کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۱ (شیمی-فیزیک)** نیمسال(اول/**دوم**) **۹۳-۱۳۹۲** مدرس : **شاه‌حسینی- موسوی**
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۳/۳/۲۱** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
از نوشتن با مداد خودداری نمایید.
استفاده از هیچگونه ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال۱- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = x\sqrt{۲-x}$ و محور xها را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۲- انتگرال نامعین $\int \frac{۳x^۲+۱۱x+۱۸}{x^۳+۶x^۲+۹x}dx$ را حل کنید. **۲۵ نمره**

سوال۳- ناحیه محدود به منحنی تابع $y = \frac{۲\sqrt{x+۱}}{x^۲+۲x+۳}$ حول محور xها دوران کرده است. **۲۰ نمره**
حجم جسم حاصل را بیابید.

سوال۴- همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n^۲+n}$ را مشخص کنید. **۱۰ نمره**

فقط به یکی از قسمتهای (الف) یا (ب) پاسخ دهید :

سوال۵- الف) مقدار $z = \frac{(۱+i)^۳}{(۱-i)(\sqrt{۳}+i)^۵}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

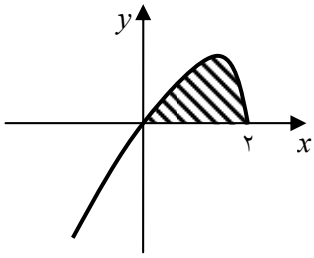
ب) شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲n+۱}{۵^n}(x-۳)^n$ را بیابید.

سوال۶- سری مک لورن تابع $y = \tan x$ را بنویسید. (حداقل ۳ جمله اولیه غیر صفر را بنویسید.) **۱۵ نمره**

این سوال را فقط دانشجویان رشته فیزیک پاسخ دهند.

سوال۷- انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{(۴-x^۲)\sqrt{۴-x^۲}}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

موفق باشید



سوال۱- مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با : $S=\int_{0}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx$

روش اول : برای حل انتگرال از تغییر متغیر $t^2=2-x$ استفاده می‌کنیم.

$$S=\int_{t=\sqrt{2}}^{0}(2-t^2)\sqrt{t^2}\,(-2tdt)=\int_{t=0}^{\sqrt{2}}(4t^2-2t^4)\,dt$$

$$=[\frac{4}{3}t^3-\frac{2}{5}t^5]_{t=0}^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{5}=\frac{16\sqrt{2}}{15}$$

روش دوم : برای حل انتگرال از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}u=x\\ dv=\sqrt{2-x}dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{-2}{3}(\sqrt{2-x})^3\end{cases}\rightarrow S=\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx=\frac{-2x}{3}(\sqrt{2-x})^3\,|_0^2+\int_0^2\frac{2}{3}(\sqrt{2-x})^3\,dx$$

$$\rightarrow\ S=\int_0^2\frac{2}{3}(\sqrt{2-x})^3\,dx=\frac{2}{3}\times\frac{-2}{5}(\sqrt{2-x})^5\,|_0^2=\frac{16\sqrt{2}}{15}$$

سوال۲- تابع گویای داخل انتگرال را به کسرهای ساده‌تر تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{3x^2+11x+18}{x^3+6x^2+9x}=\frac{3x^2+11x+18}{x(x+3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$$

می‌دانیم :

$$A=\frac{3x^2+11x+18}{(x+3)^2}|_{x=0}=2\quad,\quad C=\frac{3x^2+11x+18}{x}|_{x=-3}=-4$$

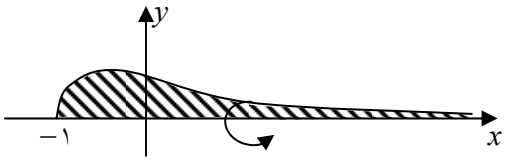
تا اینجا داریم :

$$\frac{3x^2+11x+18}{x^3+6x^2+9x}=\frac{2}{x}+\frac{B}{x+3}-\frac{4}{(x+3)^2}$$

این تساوی به ازای $x=-1$ برقرار است پس $\frac{10}{-4}=-2+\frac{B}{2}-1$ یعنی $B=2$ بنابر این : $\frac{3x^2+11x+18}{x^3+6x^2+9x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+3}-\frac{4}{(x+3)^2}$

$$\int\frac{3x^2+11x+18}{x^3+6x^2+9x}dx=\int(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+3}-\frac{4}{(x+3)^2})dx=2\ln x+\ln(x+3)+\frac{4}{x+3}+c$$

سوال۳- حجم جسم مورد نظر برابر است با :



$$V=\int_{-1}^{\infty}\pi\,y^2\,dx=\pi\int_{-1}^{\infty}\frac{4(x+1)}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

$$=2\pi\int_{-1}^{\infty}\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx=2\pi\times\frac{-1}{x^2+2x+3}|_{-1}^{\infty}=\pi$$

سوال۴- روش اول (آزمون مقایسه) : می دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست و به ازای هر n داریم $\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ نیز همگراست.

روش دوم (آزمون مقایسه حدی) : می دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست و به ازای هر n داریم $\lim(\frac{1}{n^2+n}\div\frac{1}{n^2})=1$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ نیز همگراست.

روش سوم (آزمون انتگرال) : می دانیم $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}=\int_{1}^{\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx=\ln\frac{x}{x+1}\Big|_{1}^{\infty}=\ln 2$

چون انتگرال همگراست پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ نیز همگراست.

روش چهارم (محاسبه مقدار سری) : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=1$

یعنی سری همگراست.

سوال۵- الف) $z=\frac{(1+i)^3}{(1-i)(\sqrt{3}+i)^5}=\frac{(\sqrt{2}\,e^{\pi i/4})^3}{(\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4})(2e^{\pi i/6})^5}=\frac{2\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}}{32\sqrt{2}e^{-\pi i/4}e^{5\pi i/6}}=\frac{1}{16}e^{\pi i/6}=\frac{1}{32}(\sqrt{3}+i)$

ب) شعاع همگرایی سری برابر $R=5$ است زیرا : $R=\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{5^n}\div\frac{2(n+1)+1}{5^{n+1}})=\lim_{n\to\infty}\frac{5(2n+1)}{2n+3}=5$

سوال۶- مشتقات تابع $y=\tan x$ را محاسبه می‌کنیم. $y'=1+\tan^2 x\ ,\ y''=2\tan x(1+\tan^2 x)$

$y'''=2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^2 x(1+\tan^2 x)\ ,\ y^{(4)}=16\tan x(1+\tan^2 x)^2+4\tan^3 x(1+\tan^2 x)$

تا اینجا داریم $y(0)=0\ ,\ y'(0)=1\ ,\ y''(0)=0\ ,\ y'''(0)=2\ ,\ y^{(4)}(0)=0$ که شامل دو مقدار غیر صفر است.

$y^{(5)}=16(1+\tan^2 x)^3+76\tan^3 x(1+\tan^2 x)^2+8\tan^4 x(1+\tan^2 x)\ \to\ y^{(5)}(0)=16$

اکنون داریم : $y=\tan x=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{16}{5!}x^5+\cdots=x+\frac{x}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots$

سوال۷- برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $x=2\sin t$ استفاده می‌کنیم.

$$\int\frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{2\cos t\,dt}{(4-4\sin^2 t)\sqrt{4-4\sin^2 t}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{4}\tan t+c=\frac{1}{4}\frac{\sin t}{\cos t}+c$$

$$=\frac{1}{4}\frac{x/2}{\sqrt{4-x^2}/2}+c=\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+c$$